УДК 519.863

Ключевые слова:
оценка эффективности,
оценка риска,
функция риска,
коэффициент риска,
свертка критериев,
закон распределения

***В. А. Горелик**, д. ф.-м. н.,*
проф., вед. науч. сотр.
Вычислительного Центра им. А. А. Дородницына РАН
*(**e-mail: vgor16@mail.ru**)*
***Т. В. Золотова**, д. ф.-м. н.,*
доц., проф. кафедры «Прикладная математика»
Финансового университета при Правительстве РФ
*(**e-mail: tgold11@mail.ru**)*

Об эквивалентности принципов оптимальности инвестиционного портфеля

Вопросам выбора принципов оптимальности поведения инвесторов на фондовом рынке, т. е. вида оптимизируемого критерия при принятии решения о составе портфелей ценных бумаг, посвящена обширная литература[1]. При этом разработка принципов оптимальности портфеля ценных бумаг предполагает решение вопроса о соотношении его доходности и риска.

Статическая постановка задачи формирования инвестиционного портфеля впервые сформулирована Г. Марковицем[2]. При этом в качестве оценки риска ученый использовал функцию риска, заданную в метрике l_2^2 (дисперсия). В более поздней работе Г. Марковица[3] задача поиска оптимального портфеля была поставлена как задача минимизации разности дисперсии и математического ожидания доходности портфеля (коэффициент риска при дисперсии равен 1). Кроме того, в той же работе была рассмотрена задача на максимум математического ожидания доходности при ограничении на дисперсию, а чаще всего финансовыми аналитиками рассматривается задача минимизации дисперсии при ограничении по доходности. Решением всех этих задач является эффективный портфель.

---

[1] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Модели оценки коллективного и системного риска. Научное издание. — М.: ВЦ РАН, 2011. — 163 с.; Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции: Пер. с англ. — М.: ИНФРА-М, 2004. — Т. XII. — 1028 с.; Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. — М.: ФАЗИС, 1998. — 512 с.*

[2] *Markowitz H. M. Portfolio Selection // Journal of Finance. — 1952. — № 7. — P. 77–91.*

[3] *Markowitz H. M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment. — NY: Wiley, 1959. — 344 с.*

В статьях В. А. Горелика и Т. В. Золотовой[4] задача формирования портфеля рассматривалась как задача максимизации линейной свертки критериев «математическое ожидание — дисперсия». В силу свойств выпуклости она дает необходимые и достаточные условия Парето-оптимальности, т. е. любая задача, решением которой является эффективный портфель, эквивалентна данной задаче при некотором значении коэффициента риска. В работе «Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах»[5] авторами предложена задача минимизации свертки типа отношения функции риска, заданной в метрике l_2 (СКО), к математическому ожиданию, а также задача минимизации вероятностной функции риска (VAR). Показан способ сведения таких задач к задаче квадратичного программирования. При этом в задаче с вероятностной функцией риска предполагалось, что случайные значения доходностей финансовых инструментов нормально распределены.

В настоящей статье рассмотрены две постановки задачи формирования портфеля: задача максимизации линейной свертки критериев «математическое ожидание — дисперсия» и задача минимизации вероятностной функции риска. Показана эквивалентность этих двух методов нахождения оптимального портфеля; оптимальный выбор в задаче с вероятностной функцией риска приводит к одному из эффективных портфелей, соответствующему определенному значению коэффициента риска при дисперсии в задаче максимизации линейной свертки критериев «математическое ожидание — дисперсия». Найдена связь между параметром в вероятностной функции риска и коэффициентом риска. Рассмотрено экспоненциальное распределение случайных величин доходностей, имеющее более «тяжелые хвосты» по сравнению с нормальным распределением. Задача с вероятностной функцией риска сведена к задаче квадратичного программирования в предположении, что случайные значения доходностей финансовых инструментов имеют экспоненциальный закон распределения. Обосновано удобство использования экспоненциального закона.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ МАКСИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ — ДИСПЕРСИЯ» И МИНИМИЗАЦИИ VAR ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В основе рассматриваемых нами математических моделей фондового рынка лежит предположение, что теоретически существует вероятностное распределение n-мерного вектора r случайных величин доходностей r_i финансовых инструментов на фондовом рынке. При этом известно, что доходности представляют собой взаимосвязанные случайные величины и мерой, определяющей эту взаимосвязь, служит ковариация доходностей. Будем считать, что фондовый рынок характеризуется вектором математических ожиданий доходностей финансовых инструментов $\bar{r} = (\bar{r}_1, ..., \bar{r}_i, ..., \bar{r}_n)$ и ковариационной матрицей $K = (\sigma_{ij})_{n \times n}$. Предположим, что инвесторы основывают свое поведение на этой информации.

---

[4] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка // Государственный университет Минфина России. Финансовый журнал. — 2012. — № 3. — С. 43–52; Горелик В. А., Золотова Т. В. Критерии устойчивости фондового рынка, их связь с информированностью и принципами поведения инвесторов // Научно-исследовательский финансовый институт. Финансовый журнал. — 2013. — № 3. — С. 17–28; Горелик В. А., Золотова Т. В. О некоторых оценках устойчивости фондового рынка и влиянии на них информированности инвесторов // Проблемы управления. — 2013. — № 6. — С. 41–47.*

[5] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах. Научное издание. — М.: ВЦ РАН, 2009. — 162 с.*

Рассмотрим индивидуальное поведение инвестора, управлением которого является вектор x (портфель ценных бумаг). Компоненты портфеля x_i есть доли средств, вкладываемые в финансовые инструменты из конечного списка (i = 1, ..., n). В работе У. Шарпа, Г. Александера, Дж. Бейли[6] предлагалось рассматривать вероятностные функции риска для нахождения оптимального портфеля ценных бумаг. Рассмотрим одну их возможных постановок, а именно определим оптимальный портфель как решение задачи на минимум вероятности того, что случайное значение доходности портфеля меньше требуемого:

$$\min_x P(rx < r_p),\ xe = 1,\ x \geq 0 \tag{1}$$

где r_p — требуемое значение математического ожидания доходности портфеля, $e = (1, \ldots, 1)$, P — вероятность.

Различие между инвесторами заключается в значении величины r_p. Естественно предположение, что $r_p < m$, иначе задача (1) теряет смысл. Здесь и далее мы не делаем различия в обозначении вектора-строки и вектора-столбца, считая их соответствующими требованиям операций умножения матриц и векторов.

В исследовании[7] показано, что если $\{r_i\}$ — система нормально распределенных случайных величин доходностей r_i с математическими ожиданиями $\bar{r}_i$ и ковариационной матрицей $K = (\sigma_{ij})_{n\times n}$, то задача (1) сводится к задаче квадратичного программирования:

$$\min_y yKy,\ \bar{r}y - r_p ye = 1,\ y \geq 0, \tag{2}$$

а в результате к системе линейных алгебраических уравнений для $y > 0$:

$$2Ky^0 + \lambda^0(r_p e - \bar{r}) = 0,\ \bar{r}y^0 - r_p y^0 e = 1. \tag{3}$$

При этом решения задач (1) и (2) связаны соотношением $x^0 = \dfrac{y^0}{y^0 e}$. Если часть компонент x^0 принимает нулевое значение, то система уравнений (3) становится меньшего порядка.

Найдем решение системы уравнений (3) при невырожденной матрице K. Для этого из первой группы уравнений (3) выразим y^0: $y^0 = \frac{1}{2}\lambda^0 K^{-1}(\bar{r} - r_p e)$. Подставим его в последнее уравнение системы (3): $\frac{1}{2}\lambda^0 \bar{r} K^{-1}(\bar{r} - r_p e) - \frac{1}{2} r_p \lambda^0 e K^{-1}(\bar{r} - r_p e) = 1$ или $\frac{1}{2}\lambda^0(\bar{r} - r_p e)K^{-1}(\bar{r} - r_p e) = 1$, откуда получаем $\lambda^0 = \dfrac{2}{(\bar{r} - r_p e)K^{-1}(\bar{r} - r_p e)}$. В работе[8] показано, что $\forall\xi\ \xi K^{-1}\xi > 0$, поэтому $(\bar{r} - r_p e)K^{-1}(\bar{r} - r_p e) > 0$. Следовательно, $y^0 = \dfrac{K^{-1}(\bar{r} - r_p e)}{(\bar{r} - r_p e)K^{-1}(\bar{r} - r_p e)}$. Тогда решение задачи (1) имеет вид

$$x^0 = \frac{K^{-1}(\bar{r} - r_p e)}{(\bar{r} - r_p e)K^{-1}(\bar{r} - r_p e)}. \tag{4}$$

---

[6] *Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции.*

[7] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах.*

[8] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Модели оценки коллективного и системного риска. Научное издание.*

Определим теперь оптимальный портфель как решение задачи на максимум линейной свертки критериев математического ожидания и дисперсии случайного значения доходности портфеля:

$$\max_x [\bar{r}x - \alpha(xKx)],\ xe = 1,\ x \geq 0, \tag{5}$$

где $\alpha > 0$ — весовой коэффициент, определяющий отношение инвестора к риску (коэффициент риска). Здесь различие между инвесторами заключается в отношении к риску, выражающееся в значении коэффициента α в целевой функции.

Портфель называется полноразмерным, если у составляющего его вектора x все компоненты положительные[9]. Решение задачи (5) для полноразмерных портфелей приведено в другой работе авторов[10]:

$$x^0(\alpha) = \frac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + (K^{-1}\bar{r} - \frac{eK^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}e}K^{-1}e)\frac{1}{2\alpha}. \tag{6}$$

Исследуем вопрос, в каком случае решения задач (1) и (5) совпадают.

Теорема 1. Если при $\bar{r}$, K и r_p, удовлетворяющих условию

$$K^{-1}(\bar{r} - r_p e) > 0, \tag{7}$$

коэффициент риска $\alpha = \frac{1}{2}eK^{-1}(\bar{r} - r_p e)$, то решения задач (1) и (5) совпадают и определяют оптимальный полноразмерный портфель (6).

Доказательство: Если компоненты вектора $K^{-1}(\bar{r} - r_p e)$ положительные, то их сумма $eK^{-1}(\bar{r} - r_p e)$ тоже положительная. Значит, $\alpha = \frac{1}{2}eK^{-1}(\bar{r} - r_p e) > 0$, и оптимальный портфель x^0 согласно (4) имеет положительные компоненты.

Подставим $\alpha = \frac{1}{2}eK^{-1}(\bar{r} - r_p e)$ в (6):

$$x^0(\alpha) = \frac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + (K^{-1}\bar{r} - \frac{eK^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}e}K^{-1}e)\frac{1}{2\alpha} =$$

$$= \frac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + (K^{-1}\bar{r} - \frac{eK^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}e}K^{-1}e)\frac{1}{eK^{-1}(\bar{r} - r_p e)} =$$

$$= \frac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + \frac{(K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e) - (K^{-1}e)(eK^{-1}\bar{r})}{(eK^{-1}e)(eK^{-1}(\bar{r} - r_p e))} =$$

$$= \frac{(K^{-1}e)(eK^{-1}(\bar{r} - r_p e)) + (K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e) - (K^{-1}e)(eK^{-1}\bar{r})}{(eK^{-1}e)(eK^{-1}(\bar{r} - r_p e))} =$$

$$= \frac{(K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e) - r_p(K^{-1}e)(eK^{-1}e)}{(eK^{-1}e)(eK^{-1}(\bar{r} - r_p e))} = \frac{K^{-1}(\bar{r} - r_p e)}{eK^{-1}(\bar{r} - r_p e)}.$$

Таким образом, решение задачи (5) при $\alpha = \frac{1}{2}eK^{-1}(\bar{r} - r_p e)$ совпало с решением задачи (1), которое определяет при данном α полноразмерный портфель. Теорема доказана.

---

[9] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Некоторые вопросы оценки корреляции доходностей инвестиционных портфелей // Проблемы управления. — 2011. — № 3. — С. 36–42.*

[10] *Горелик В. А., Золотова Т. В. Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах. Научное издание.*

ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ МАКСИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ — ДИСПЕРСИЯ» И МИНИМИЗАЦИИ VAR ДЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Нормальный закон распределения получил широкую популярность и поэтому достаточно часто используется при моделировании случайных процессов. Это объясняется и удобством его применения при исследовании случайных процессов, и полезными свойствами нормального закона (например, устойчивостью). Однако в ряде случаев, в частности при моделировании случайных процессов в экономике и финансах, распределения случайных экономических показателей отличаются от нормального, т. е. нормальный закон не всегда наилучшим образом характеризует случайные процессы. Отклонение гипотезы «нормальности» связано с тем, что значение коэффициента вытянутости (эксцесса) больше у тех статистических распределений, которые соответствуют реальным данным. Известно, что коэффициент вытянутости определяется через четвертый момент. Это обстоятельство позволяет говорить о том, что такие распределения случайных величин имеют «тяжелые хвосты», т. е. соответствующая плотность распределения медленно убывает при $|x| \to \infty$ по сравнению с нормальной плотностью. Отклонение от нормального (гауссова) распределения случайных величин наблюдается в финансово-экономической области и характерно, например, для обменных курсов валют, для цен и доходностей акций. Это подтверждается как видом эмпирических плотностей (гистограмм), так и стандартными статистическими приемами обнаружения отклонений от нормального распределения: квантильный метод, критерий К. Пирсона, ранговые критерии.

К распределениям с «тяжелыми правыми хвостами» обычно относят такие, для которых вероятность того, что случайная величина превосходит достаточно большое x, имеет величину порядка x^{α} (например, распределения Стьюдента, Парето, гиперболическое[11]). В работе предлагается использовать двухстороннее экспоненциальное распределение, которое имеет менее «тяжелый хвост», чем названные выше, но более «тяжелый», чем у нормального закона. Это распределение, с одной стороны, обладает хорошими аналитическими свойствами, а с другой — в некоторых случаях лучше, чем нормальное, описывает финансовую статистику. Примером может служить распределение случайной величины доходности акций компании «Аэрофлот». В данной работе использовались статистические данные цен акций компании «Аэрофлот» за период с января 2013 г. по январь 2014 г.[12]. При этом значения доходности акций компании определялись с использованием ежедневных цен закрытия торговых сессий.

Рассмотрим гипотезы о нормальном распределении случайной величины доходности акций с плотностью $f(\xi) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\xi - m)^2}{2\sigma^2}}$ и об экспоненциальном распределении с плотностью $g(\xi) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|\xi - m|}$, где m — математическое ожидание, σ — среднеквадратическое отклонение случайной величины доходности акций, λ — параметр, равный $\sqrt{2}/\sigma$. В случае гипотезы о нормальном распределении этой величины критерий согласия К. Пирсона дает значение $\chi^2 = 44{,}336$, которому соответствует вероятность $P = 0{,}001$ того, что эта величина превзойдет данное значение χ^2. Это свидетельствует о том, что расхождение теоретического и статистического распределений велико и статистические данные значений доходности акций компании «Аэрофлот»

[11] *Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики.*

[12] *Данные котировок с Московской межбанковской валютной биржи (http://www.finam.ru/analysis/profile00008/default.asp, дата обращения 18.01.2014).*

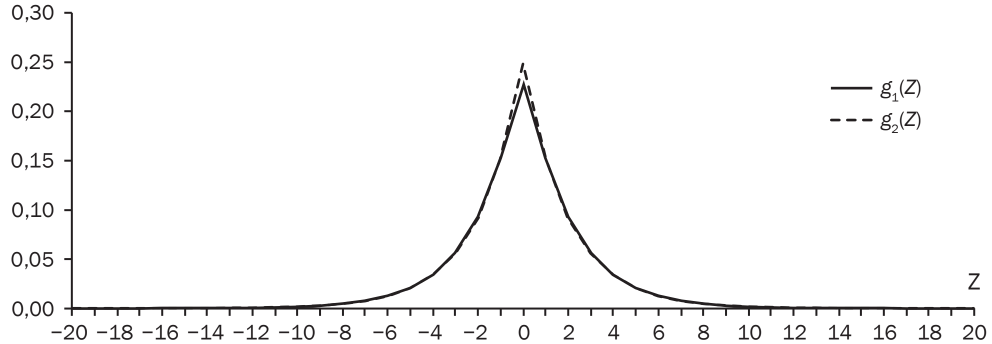
противоречат гипотезе о нормальном их распределении. Но в случае гипотезы об экспоненциальном распределении имеем $\chi^2 = 19{,}901$, а $P = 0{,}3$, т. е. расхождение теоретического и статистического распределений можно считать несущественным и гипотезу об экспоненциальном распределении случайной величины доходности акций компании «Аэрофлот» — правдоподобной.

В отличие от нормального распределения экспоненциальное распределение случайной величины Y не является устойчивым[13], т. е. отсутствует сходимость по экспоненциальному распределению случайных величин $\frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{d_n} + a_n$ к Y, где $\{Y_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\{a_n\}$ — последовательность действительных чисел, $\{d_n\}$ — последовательность положительных чисел. Так, например, применяя для суммы двух экспоненциально распределенных случайных величин $Y_1 + Y_2 = Z$ с одинаковыми математическими ожиданиями формулу для композиции двух законов распределения[14], получаем закон распределения $g_1(Z) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}(\lambda_2 e^{-\lambda_1|Z-m|} - \lambda_1 e^{-\lambda_2|Z-m|})$. В случае устойчивости экспоненциального распределения закон принял бы вид $g_2(Z) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_2^2 + \lambda_1^2)} e^{-\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2^2+\lambda_1^2)}|Z-m|}$. Однако, как показывают численные эксперименты, имеет место приблизительная устойчивость.

Пример 1. Пусть $\lambda_1 = 0{,}5$, $\lambda_2 = 5$, $m = 0$. Как видно на рисунке, графики $g_1(Z)$ и $g_2(Z)$ практически совпадают, особенно в «хвостовой» части. Так, для $Z = 50$ имеем $g_1(50) = 3{,}507\times10^{-12}$ и $g_2(50) = 3{,}911\times10^{-12}$.

Рисунок 1

Графики плотностей распределения $g_1(Z)$ и $g_2(Z)$



Источник: составлено авторами по данным котировок акций компании «Аэрофлот».

Рассмотрим вопрос о нахождении решения задачи (1), если случайные величины доходностей имеют экспоненциальный закон распределения.

Теорема 2. Пусть случайная величина доходности портфеля x описывается приближенно экспоненциальным распределением с математическим ожиданием $\bar{r}x$ и дисперсией xKx. Тогда в задаче (1) функция цели $P(rx < r_p)$ достигает минимума на заданном множестве $X = \{x\,|\,xe = 1, x \geq 0\}$ в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)$ такой, что $x^0 = \frac{y^0}{y^0 e}$, а $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$ является решением задачи квадратичного программирования:

---

[13] *Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики.*

[14] *Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — М.: КноРус, 2010. — 658 с.*

$$\min_y yKy,\ \bar{r}y - r_p ye = 1,\ y \geq 0, \tag{8}$$

Доказательство. По предположению случайная величина rx экспоненциально распределена, т. е. $P(rx < r_p) = \frac{1}{2}\lambda\int_{-\infty}^{r_p} e^{-\lambda|t-m|}dt$, где $m = \bar{r}x$ — математическое ожидание, $\lambda = \sqrt{2}/\sigma$, $\sigma = (xKx)^{1/2}$ — СКО случайной величины rx. Поскольку $r_p < m$, то $|t - m| = -(t - m)$ и $P(rx < r_p) = \frac{1}{2}\lambda\int_{-\infty}^{r_p} e^{-\lambda|t-m|}dt = \frac{1}{2}\lambda\int_{-\infty}^{r_p} e^{\lambda(t-m)}dt = \frac{1}{2}e^{\lambda(t-m)}\Big|_{-\infty}^{r_p} = \frac{1}{2}e^{\lambda(r_p-m)}$, причем $\lambda(r_p - m) < 0$. Значит, минимизация величины $P(rx < r_p)$ сводится к максимизации показателя степени (или минимизации его обратной величины). Учитывая, что $\lambda = \sqrt{2}/\sigma$, задача, эквивалентная (1), примет вид $\frac{\sigma}{a - r_p} \to \min$. Возвращаясь к переменной x, окончательно получаем

$$\min_{x\in X}\frac{(xKx)^{1/2}}{\bar{r}x - r_p}. \tag{9}$$

Покажем, что задача (9) сводится к задаче квадратичного программирования, а в результате — к системе линейных алгебраических уравнений. Действительно, введем обозначение $z = (\bar{r}x - r_p)^{-1}$. Тогда задача (9) примет вид

$$\min_{x,z}((zx)K(zx))^{1/2},\ \bar{r}(zx) - zr_p = 1,\ xe = 1,\ x \geq 0.$$

Приняв $y = zx$, имеем $ye = z$ и получаем задачу (8). Пусть $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$ — решение задачи (8), тогда $x^0 = \frac{y^0}{y^0e}$ — решение задачи (1). Теорема доказана.

Замечание 1. В случае гипотезы о нормальном распределении системы случайных величин $\{r_i\}$ для вычисления величины $P(rx < r_p)$ требовалось использование функции Лапласа. Удобство гипотезы об экспоненциальном распределении заключается в простой процедуре вычисления $P(rx < r_p)$, не требующей использования функции Лапласа. Зная x^0, можно вычислить минимальное значение вероятности того, что случайная доходность портфеля меньше требуемой: $P(rx^0 < r_p) = \frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{2}(r_p - \bar{r}x^0)}{(x^0Kx^0)^{1/2}}}$.

Замечание 2. Решение задачи (8) имеет вид (4). Значит, теорема 1 верна и в случае гипотезы об экспоненциальном законе распределения случайных величин доходностей в задаче (1), а именно для $\bar{r}$, K и r_p, удовлетворяющих условию $K^{-1}(\bar{r} - r_pe) > 0$, и коэффициента риска $\alpha = \frac{1}{2}eK^{-1}(\bar{r} - r_pe)$ решения задач минимизации вероятностной функции риска и максимизации линейной свертки «математическое ожидание — дисперсия» совпадают и определяют оптимальный полноразмерный портфель $x^0(\alpha) = \frac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + (K^{-1}\bar{r} - \frac{eK^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}e}K^{-1}e)\frac{1}{2\alpha}$.

Пример 2. Имеются три ценные бумаги, вектор ожидаемых доходностей которых имеет вид $\bar{r} = (0{,}15;\ 0{,}25;\ 0{,}26)$, а ковариационная матрица $K = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}05 & -0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ -0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

Пусть требуемое значение ожидаемой доходности портфеля составляет $r_p = 0{,}1$. Тогда решение задачи (8) есть $y^0 = (5{,}589;\ 0{,}643;\ 3{,}9)$, а $x^0 = (0{,}552;\ 0{,}063;\ 0{,}385)$. При этом математическое ожидание портфеля $\bar{r}x^0 = 0{,}199$ строго больше $r_p = 0{,}1$. Минимальное значение вероятности того, что случайная доходность портфеля меньше требуемой, $P(rx^0 < r_p) = \frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{2}(r_p - \bar{r}x^0)}{(x^0Kx^0)^{1/2}}} = 0{,}247$. Проверим условие $K^{-1}(\bar{r} - r_p e) > 0$. Действительно, $K^{-1}(\bar{r} - r_p e) = (1{,}39; 0{,}16; 0{,}97)$. Значит, $\alpha = \frac{1}{2}eK^{-1}(\bar{r} - r_p e) = 1{,}26$ и оптимальный портфель $x^0(\alpha) = \frac{K^{-1}e}{eK^{-1}e} + (K^{-1}\bar{r} - \frac{eK^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}e}K^{-1}e)\frac{1}{2\alpha} = (0{,}552; 0{,}063; 0{,}385)$, являющийся решением задачи (5), является решением задачи (1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами рассмотрены задачи нахождения оптимального портфеля ценных бумаг с использованием вероятностной функции риска портфеля для гипотез о нормальном и экспоненциальном законах распределения случайных величин доходностей. Найдено значение коэффициента риска в модели «математическое ожидание — дисперсия», при котором задача минимизации вероятностной функции риска эквивалентна задаче максимизации линейной свертки критериев «математическое ожидание — дисперсия» при выполнении некоторого условия, налагаемого на исходные данные моделей. Показано, что при выполнении этого условия решение задач дает полноразмерный портфель.

Таким образом, если для нахождения оптимального портфеля использовать модель с вероятностной функцией риска, то результаты проведенного исследования дают возможность решать задачу нахождения оптимального портфеля при любой из двух рассмотренных гипотез о распределении случайных величин доходностей, а также определять эквивалентное отношение инвестора к риску (коэффициент риска).

Библиография

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — М.: КноРус, 2010. — 658 с.
2. Горелик В. А., Золотова Т. В. Модели оценки коллективного и системного риска. Научное издание. — М.: ВЦ РАН, 2011. — 163 с.
3. Горелик В. А., Золотова Т. В. Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах. Научное издание. — М.: ВЦ РАН, 2009. — 162 с.
4. Горелик В. А., Золотова Т. В. Некоторые вопросы оценки корреляции доходностей инвестиционных портфелей // Проблемы управления. — 2011. — № 3.
5. Горелик В. А., Золотова Т. В. Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка // Государственный университет Минфина России. Финансовый журнал. — 2012. — № 3.
6. Горелик В. А., Золотова Т. В. Критерии устойчивости фондового рынка, их связь с информированностью и принципами поведения инвесторов // Научно-исследовательский финансовый институт. Финансовый журнал — 2013. — № 3.
7. Горелик В. А., Золотова Т. В. О некоторых оценках устойчивости фондового рынка и влиянии на них информированности инвесторов // Проблемы управления. — 2013. — № 6.
8. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции: Пер. с англ. — М.: ИНФРА-М, 2004. — Т. XII.
9. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. — М.: ФАЗИС, 1998. — 512 с.
10. Markowitz H. M. Portfolio Selection // Journal of Finance. — 1952. — № 7.
11. Markowitz H. M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment. — NY: Wiley, 1959. — 344 c.
12. Данные котировок с Московской межбанковской валютной биржи [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.finam.ru/analysis/profile00008/default.asp (дата обращения 18.01.2014).